Diffrazione Circolare

Edoardo L. Gernone

Marzo 2025

1 La diffrazione circolare

Se un'onda piana viene fatta passare attraverso un foro circolare, su uno schermo posto a grande distanza compare una figura di diffrazione costituita da un massimo centrale rappresentato da un disco luminoso e corone circolari attorno ad esso chiare e scure. Il primo minimo si trova in corrispondenza dell'angolo:

$$\sin\theta = 1.22\frac{\lambda}{D}$$

Ove D è il diametro del foro e λ la lunghezza d'onda dell'onda piana infrangente. Per il principio di Babinet valgono le stesse considerazioni e gli stessi risultati per un'onda che infrange su un disco opaco di diametro D.

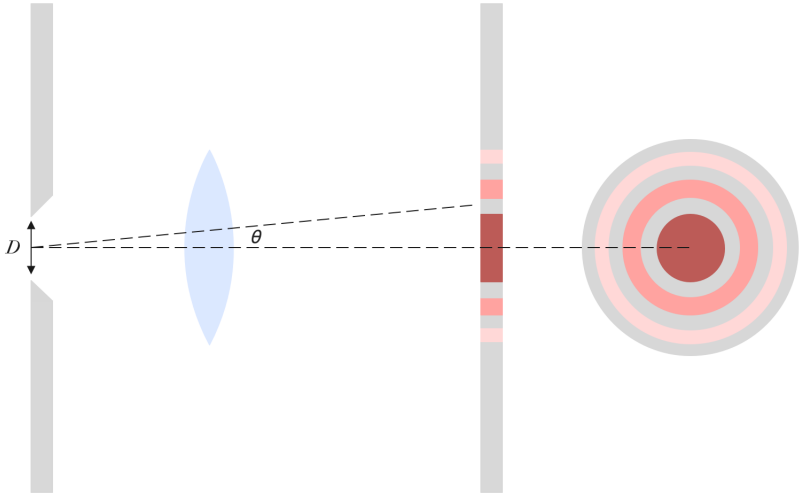

Figure 1: Figura di diffrazione circolare

2 Dimostrazione

L'obbiettivo è ottenere un'espressione per l'intensità $I(\theta)$ in funzione dell'angolo. Per farlo, poichè $I = EE^*/2$, ove E^* è il complesso coniugato del campo elettrico, basta ottenere un'espressione di E con il metodo simbolico. Nella diffrazione ogni superficie infinitesima $d\Sigma$ del foro agisce come sorgente. Ogni $d\Sigma$ mappa a sua volta tutti i punti sullo schermo rilevatore. Dobbiamo quindi sommare tutti i contributi di ogni superficie infinitesima per ottenere il risultato finale. Per prima cosa poniamo il foro su un piano ortogonale alla direzione di propagazione dell'onda a $x = 0$. Ogni superficie infinitesima $d\Sigma$ avrà coordinate $(0, y, z)$. Ad una certa distanza dal foro, si pone lo schermo rilevatore i cui punti avranno coordinate $P(X, Y, Z)$. Ovviamente $x \equiv X$. Si consideri che il foro abbia raggio $a = D/2$ e che R sia la distanza dal centro del foro al punto P, mentre r la distanza da $d\Sigma$ a P. Si consideri $R \gg D$.

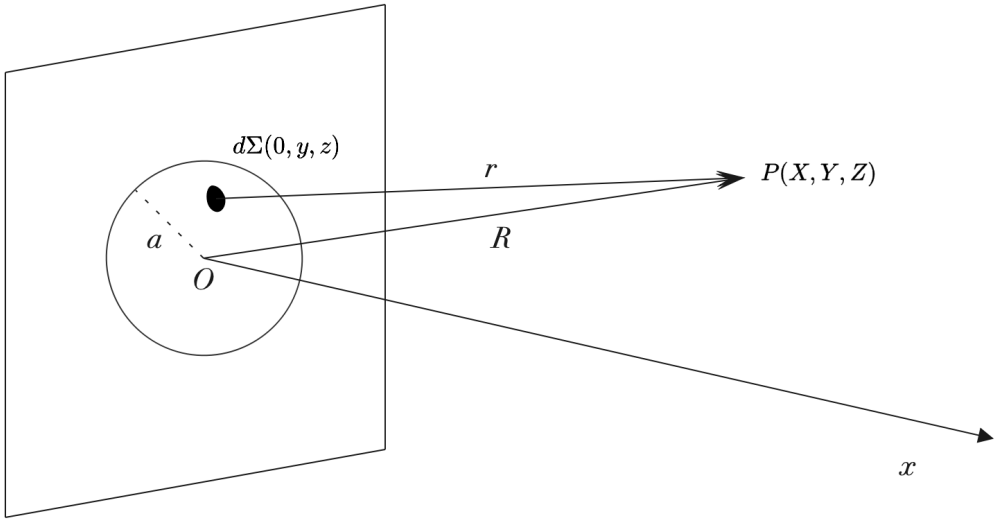

Figure 2: Sistemi di riferimento

Si può cominciare calcolando R ed r:

$$R = \left(X^2 + Y^2 + Z^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} r &= \left((X-0)^2 + (Y-y)^2 + (Z-z)^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(X^2 + Y^2 + Z^2 + y^2 + z^2 - 2(Yy + Zz)\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(R^2 + y^2 + z^2 - 2(Yy + Zz)\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= R\left(1 + \frac{y^2 + z^2}{R^2} - \frac{2(Yy + Zz)}{R^2}\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Poichè $\sqrt{y^2 + z^2} < D \ll R$ (può essere al massimo $a = D/2$), $(y^2 + z^2)/R^2 \sim 0$. r diventa quindi:

$$r = R\left(1 - \frac{2(Yy + Zz)}{R^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Sia $-2(Yy + Zz)/R^2 = u$, allora per il teorema binomiale:

$$\begin{aligned} (1+u)^n &= 1 + nu + \frac{1}{2}(n-1)nu^2 + \cdots \\ &= 1 + nu + \mathcal{O}(u^2) \end{aligned}$$

I termini di secondo grado possono essere trascurati per $R \gg D$, quindi si ottiene:

$$r = R\left(1 - \frac{(Yy + Zz)}{R^2}\right)$$

Ora finalmente possiamo considerare l'equazione per il campo elettrico:

$$dE = \frac{E_0}{R} e^{i(\omega t - kr)} d\Sigma$$

Sostituendo all'interno r si ottiene:

$$\begin{aligned} dE &= \frac{E_0}{R} \exp\left(i\omega t - ikR + ik\frac{(Yy + Zz)}{R}\right) d\Sigma \\ &= \frac{E_0}{R} \exp\left(i(\omega t - kR)\right) \exp\left(i\frac{k(Yy + Zz)}{R}\right) d\Sigma \end{aligned}$$

Per le considerazioni fatte in precedenza, ovvero per $R \gg D$, R è circa costante per ogni punto. Integrando ambo i lati si ottiene:

$$E = \frac{E_0}{R} \exp\left(i(\omega t - kR)\right) \iint_\Sigma \exp\left(i\frac{k(Yy + Zz)}{R}\right) d\Sigma$$

Il problema ha simmetria cilindrica. Si consideri la figura che segue:

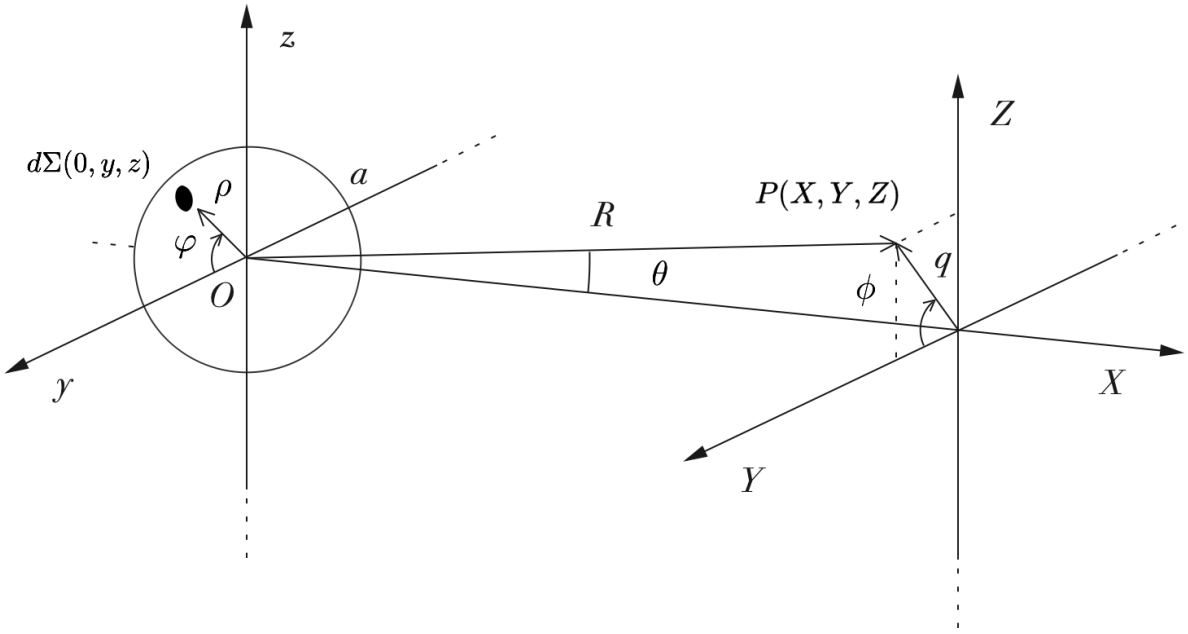

Figure 3: La simmetria cilindrica del problema

Sono state effettuate le seguenti trasformazioni di coordinate:

$$\begin{cases} y &= \rho\cos\varphi \\ z &= \rho\sin\varphi \end{cases} \qquad \begin{cases} Y &= q\cos\phi \\ Z &= q\sin\phi \end{cases}$$

In coordinate cilindriche $d\Sigma = \rho d\rho d\varphi$, si può ora sostituire tutto all'interno dell'equazione per il campo elettrico:

$$\begin{aligned} E &= \frac{E_0}{R} \exp\left(i(\omega t - kR)\right) \iint_{\Sigma'} \exp\left(i\frac{k}{R}\rho q(\cos\varphi\cos\phi + \sin\varphi\sin\phi)\right) \rho d\rho d\varphi \\ &= \frac{E_0}{R} \exp\left(i(\omega t - kR)\right) \int_{\rho=0}^{\rho=a} \int_{\rho=0}^{\rho=2\pi} \exp\left(i\frac{k\rho q}{R}\cos(\varphi - \phi)\right) \rho d\rho d\varphi \end{aligned}$$

Considerando che $\cos\varphi\cos\phi + \sin\varphi\sin\phi = \cos(\varphi - \phi)$. Gli estremi di integrazione si ricavano facilmente dalla figura 3. Poichè il problema ha simmetria assiale, l'intensità del campo elettrico è indipendente dall'angolo ϕ. Quindi si può considerare $\phi = 0$ senza perdere generalità. Osservando la formula che abbiamo ottenuto, notiamo che una volta svolto l'integrale otterremo un'espressione per il modulo del campo elettrico $E(q)$ in funzione di q. Questo ci permetterà di calcolare l'intensità ad una certa distanza q radiale dal centro della figura di diffrazione, in figura 3 rappresentato dall'origine del piano XYZ. Per risolvere l'integrale bisogna prima considerare la definizione per la funzione di Bessel del n-esimo tipo:

$$J_n(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(x\cos\theta - n\theta)} d\theta$$

Notiamo che:

$$\int_0^{2\pi} \exp\left(i\frac{kq}{R}\rho\cos\varphi\right) d\varphi = 2\pi J_0\left(\frac{kq}{R}\rho\right)$$

E quindi, l'espressione per il campo elettrico diventa:

$$E(q) = 2\pi \frac{E_0}{R} \exp\left(i(\omega t - kR)\right) \int_0^a \rho J_0\left(\frac{kq}{R}\rho\right) d\rho$$

Semplifichiamo i calcoli facendo una sostituzione: sia $u = kq\rho/R$, allora $du = (kq/R)d\rho$. Per $\rho = 0$, $u = 0$; per $\rho = a$, $u = kaq/R$. Sostituendo si ottiene:

$$E(q) = 2\pi \frac{E_0}{R} \exp\left(i(\omega t - kR)\right) \left(\frac{R}{kq}\right)^2 \int_0^{kaq/R} u J_0(u) du$$

È possibile dimostrare che:

$$\int u J_0(u) du = u J_1(u)$$

Si ottiene quindi:

$$\begin{aligned} E(q) &= 2\pi \frac{E_0}{R} \exp\left(i(\omega t - kR)\right) \left(\frac{R}{kq}\right)^2 \frac{kaq}{R} J_1\left(\frac{kaq}{R}\right) \\ &= 2\pi \frac{E_0}{R} \exp\left(i(\omega t - kR)\right) \frac{R}{kq} \frac{a^2}{a} J_1\left(\frac{kaq}{R}\right) \\ &= 2\pi a^2 \frac{E_0}{R} \exp\left(i(\omega t - kR)\right) \frac{J_1\left(\frac{kaq}{R}\right)}{\frac{kaq}{R}} \end{aligned}$$

Considerando che $\pi a^2 = S$, area della fessura, si ottiene l'espressione finale per il modulo del campo elettrico:

$$E(q) = 2\frac{SE_0}{R} \exp\left(i(\omega t - kR)\right) \frac{J_1\left(\frac{kaq}{R}\right)}{\frac{kaq}{R}}$$

Ora si può calcolare il complesso coniugato di E e tramite $I(q) = EE^*/2$ si ottiene finalmente un'espressione per l'intensità:

$$I(q) = 2\frac{S^2 E_0^2}{R^2} \left(\frac{J_1\left(\frac{kaq}{R}\right)}{\frac{kaq}{R}} \right)^2$$

Per prima cosa vediamo cosa succede per $q = 0$. Poichè:

$$\lim_{u \to 0} \frac{J_1(u)}{u} = \frac{1}{2}$$

Allora:

$$I(0) = \frac{S^2 E_0^2}{2R^2}$$

Per R più o meno costante quando $R \gg D$ e considerando che $R \sin\theta = q$, si ottiene un'espressione per l'intensità in funzione dell'angolo θ:

$$I(\theta) = 4I(0) \left(\frac{J_1(ka\sin\theta)}{ka\sin\theta} \right)^2$$

Per $ka/R = 1$ questo è il grafico di $I(q)/(4I(0))$:

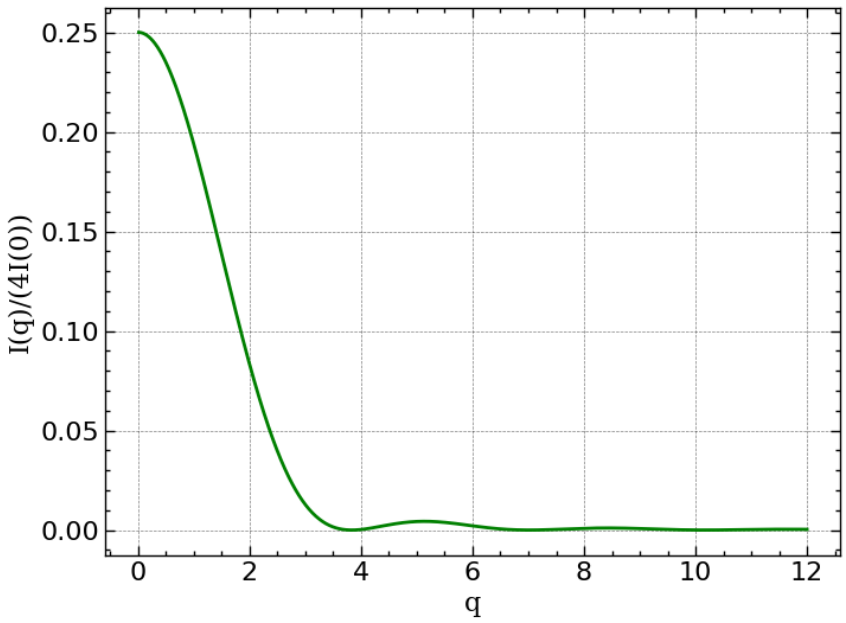

Figure 4: Il comportamento di $I(q)$

Per trovare i minimi poniamo la derivata di $(J_1(u)/u)^2$ uguale a 0:

$$\frac{d}{du}\left(\frac{J_1(u)}{u}\right)^2 = 0$$

Si trova il primo minimo di intensità a $u = ka\sin\theta \simeq 3.83$. Poichè il numero d'onda $k = 2\pi/\lambda$, si ottiene che $\sin\theta = 3.83\lambda/(\pi D)$, ovvero:

$$\sin\theta \simeq 1.22\frac{\lambda}{D}$$

Siamo finalmemte riusciti a calcolare l'espressione per l'intensità e i suoi minimi; ora, per visualizzare meglio la diffrazione circolare si può tracciare il grafico della funzione in 3D su python. Per farlo basta ruotare la funzione attorno al proprio asse (nel nostro caso attorno all'asse delle x): in pratica calcolare I su tutti i ϕ che abbiamo trascurato prima. Per semplicità si è ribaltato il problema verticalmente, in modo tale che la figura di diffrazione appaia sul piano xy e si misuri l'intensità sull'asse z. Con queste considerazioni, per tracciare la funzione $I(q)$ bisogna porre $q = \sqrt{x^2 + y^2}$. Basta tracciare ora con *matplotlib* la superficie $z = I(q)$. La funzione J_1 è implementata in *scipy*. Si sono usati parametri tali che il coefficente di q fosse 1. Queste condizioni non corrispondono a dati reali, ma sono solamente comode per schematizzare il problema. Nella realtà $\lambda \ll D$. In questo caso, considerando $\sin\theta \sim \theta$, la larghezza angolare del massimo centrale è:

$$\Delta\theta \simeq 2.44\frac{\lambda}{D}$$

Oltre l'80% dell'energia trasmessa dall'apertura è concentrata nel massimo centrale. Il codice è il seguente:

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from scipy.special import j1
import scienceplots

plt.style.use(['science', 'notebook', 'grid'])

I_0 = 75
wv_lgt = 2 * np.pi * 10 ** -4
```

```
a =  10 ** -3
R =10
K = 2 * np.pi * a / (wv_lgt * R)

_ = np.linspace(-10, 10, 1000)
x, y = np.meshgrid(_, _)

q = np.sqrt(x**2 + y**2)
z = I_0 * (j1(K * q) / (K * q))**2

fig = plt.figure(figsize=(12, 5))

ax3d = fig.add_subplot(1, 2, 1, projection='3d')
ax3d.plot_surface(x, y, z, color = 'firebrick')
ax3d.set_title("Diffrazione Circolare - 3D")
ax3d.set_xlabel("x")
ax3d.set_ylabel("y")
ax3d.set_zlabel("I [W/m²]")
ax2d = fig.add_subplot(1, 2, 2)
c = ax2d.contourf(x, y, z, levels=2000,cmap="Reds", vmax=0.5)
fig.colorbar(c, ax=ax2d, label = " Intensità [W/m²]")

ax2d.set_xlim([-10, 10])
ax2d.set_ylim([-10, 10])
ax2d.set_title("Diffrazione Circolare - 2D")
ax2d.set_xlabel("x")
ax2d.set_ylabel("y")

plt.tight_layout()
plt.show()
```

Proiettando la superficie 3D sul piano xy, si può vedere chiaramente la figura di diffrazione. L'immagine prodotta è questa:

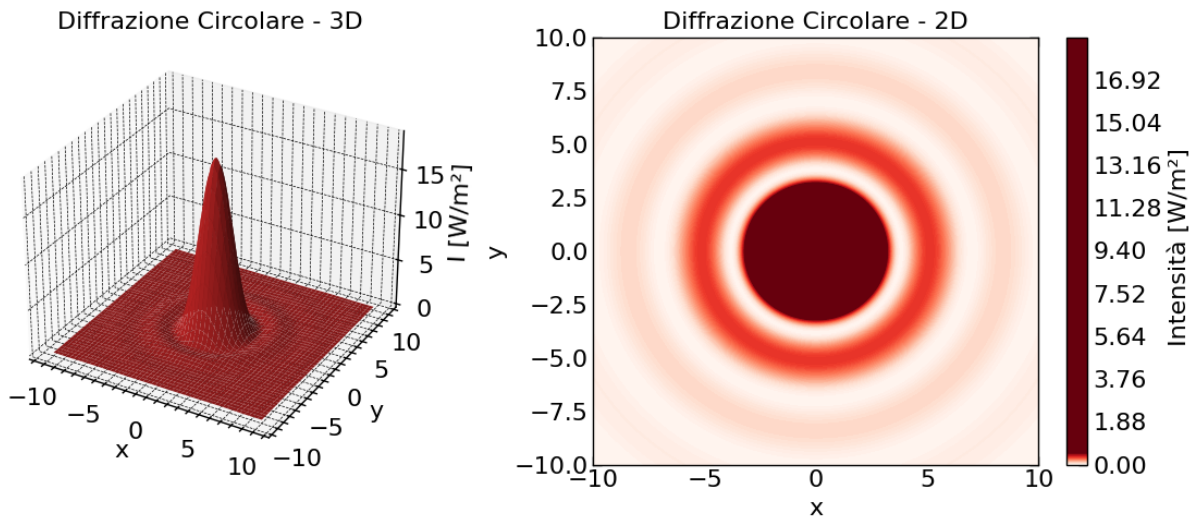

Figure 5: Grafico dell'intensità in 3D a sinistra e in 2D a destra, che corrisponde alla figura di diffrazione.

L'ultima considerazione da farsi è discutere quello che avviene se si pongono due fori uno accanto

all'altro. In questo caso bisogna sommare le due funzioni dell'intensità. Si possono chiamare le due funzioni A e B e poi tracciare il grafico per la superficie $z = A + B$. Si otterà:

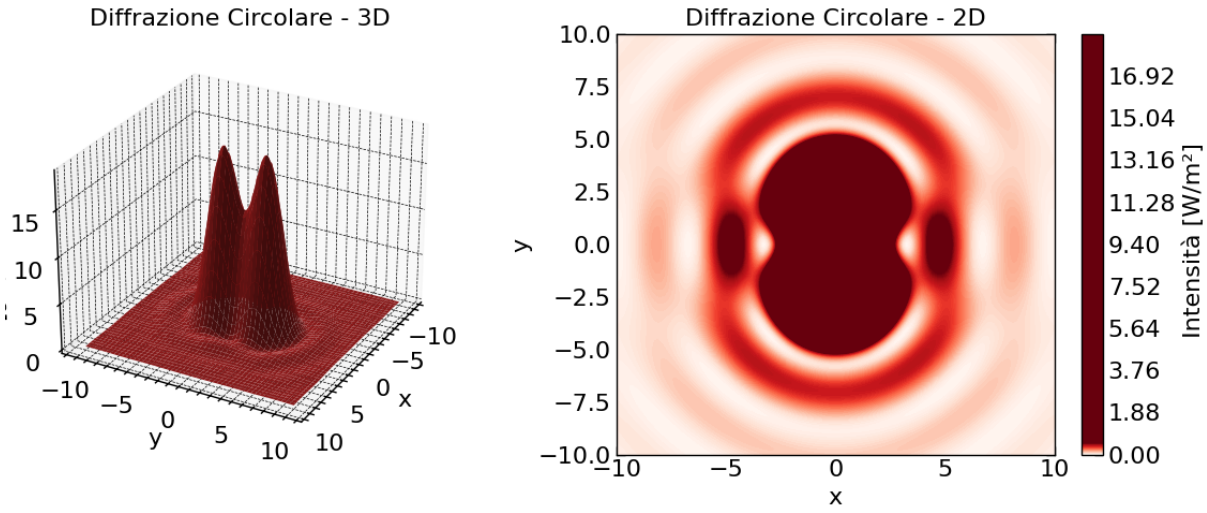

Figure 6: Diffrazione circolare di due fori: grafico dellintensità 3D a sinistra e 2D a detsra.

L'immagine di un punto data da una lente è un dischetto, dunque la situazione descritta prima è analoga a quella di due sorgenti luminose puntiformi fatte passare attraverso una lente. Se l'angolo tra la distanza della prima sorgente e il centro della lente e la distanza tra la seconda sorgente e il centro della lente, è maggiore di un certo angolo α_R detto angolo minimo risolvibile, le immagini si dicono risolte, se è uguale si dicono appena risolte. Se questo angolo è minore di α_R, non si possono distinguere i due punti: questo delinea il limite di risoluzione delle lenti. Ad esempio nella figura 6 si è visto il caso di due sorgenti appena risolte. α_R è definito come:

$$\alpha_R = 1.22\frac{\lambda}{D}$$

Ecco come appaiono i grafici dell'intensità insieme:

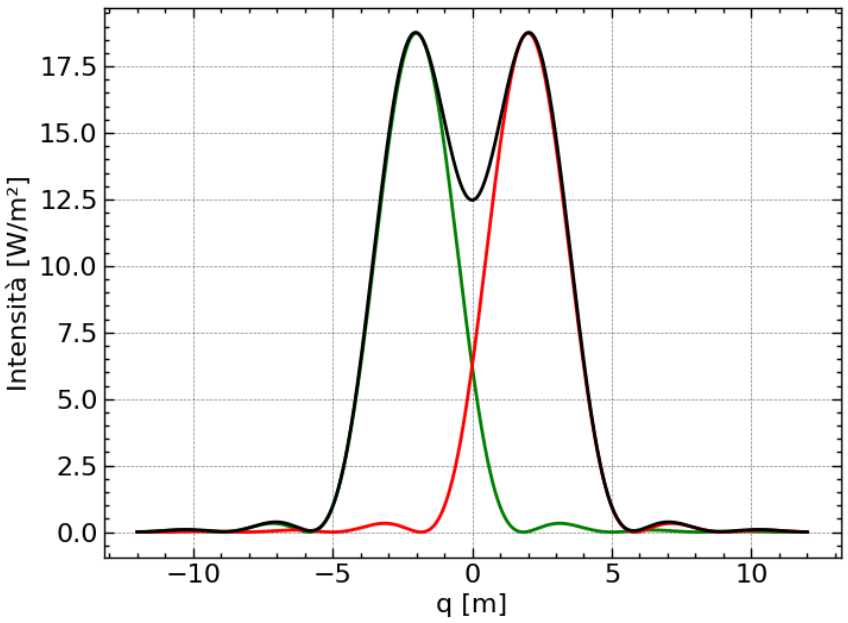

Figure 7: Figura di diffrazione di due sorgenti luminose puntiformi date da una lente quando $\alpha \simeq \alpha_R$

.